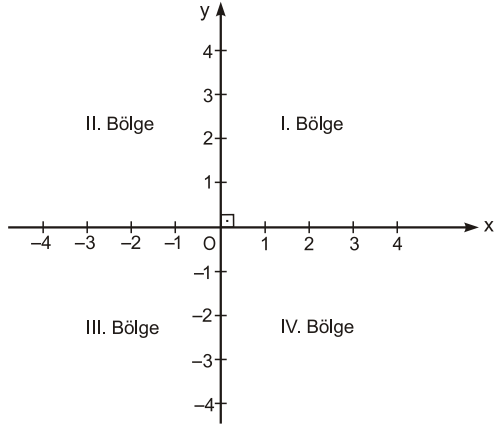


# ANALİTİK GEOMETRİ



Düzlemde ( $\mathbf{R \times R}$  veya  $\mathbf{R^2}$ ) iki reel sayı doğrusunun sıfır noktasında dik kesişimiyle oluşturulan sisteme **Dik Koordinat Sistemi** denir.

Yatay eksene  $x$ -ekseni ( $Ox$  ekseni veya  $y=0$  doğrusu; tüm noktaların ordinatı 0 dır) ya da *Apsisiler* ekseni, dikey eksene  $y$ -ekseni ( $Oy$  ekseni veya  $x=0$  doğrusu; tüm noktaların apsisi 0 dır) ya da *Ordinatlar* ekseni denir.

I. bölgedeki noktaların hem apsisleri hem de ordinatları pozitifken, IV. bölgedeki noktaların apsisleri pozitifken ordinatları negatiftir.

$O$  noktasının *koordinatları*  $(0,0)$  dır. Bu noktaya *Orijin* (başlangıç noktası) denir.

Koordinat, bir noktanın apsisi ve ordinatıyla belirlenen *İKİLİ* ye denir. Eksenlerle ve bölgelerle (I, II, III ve IV) oluşan düzleme **ANALİTİK DÜZLEM** denir.

## NOKTANIN ANALİTİĞİ:

\* I. bölgede noktalar  $(+,+)$ , II. bölgede noktalar  $(-,+)$ , III. bölgede noktalar  $(-,-)$  ve VI. bölgede noktalar  $(+,-)$  şeklindedirler.

Örnek:

$(4-a, 2-a)$  IV. Bölgede bir noktaysa  $a$  nın alabileceği tamsayı değeri kaçtır?

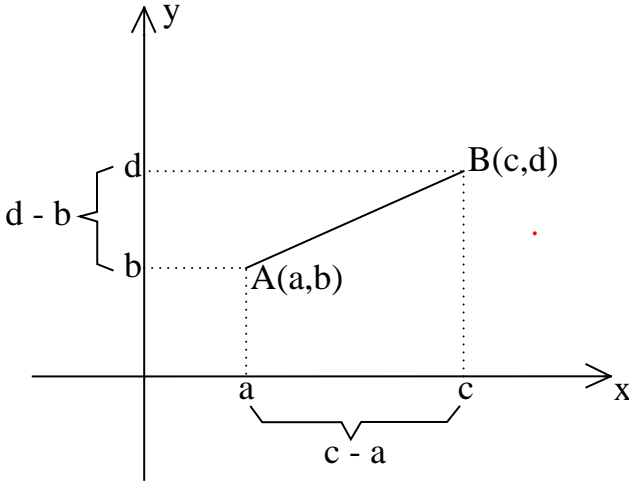
Çözüm:

$4-a > 0$  ve  $2-a < 0$  ise  $2 < a < 4$  bulunur.  $a$  nın alabileceği tek tamsayı değeri 3 tür.

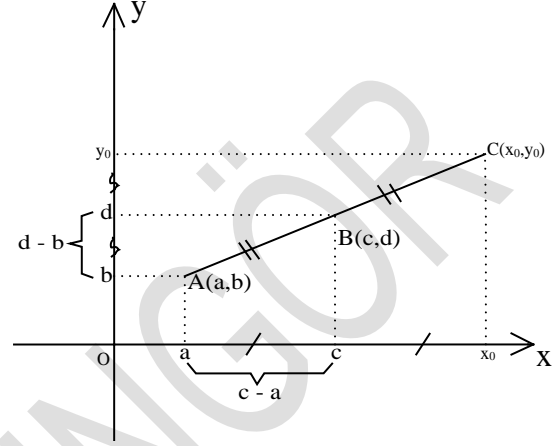
Sorular:

- 1)  $A(a-5, 3-a)$  noktası II. bölgede ise,  $B(a-7, 2a)$  noktası hangi bölgededir?
- 2)  $A(m-10, 4-m)$  noktası III. bölgede ise,  $m$  'in değer aralığı nedir?
- 3)  $A(-a+2, b+5)$  noktası III. bölgede,  $B(c-2, d-2)$  noktası I. bölgede ise,  $C(-a+b, c.d)$  hangi bölgededir?
- 4)  $A(2a-1, 3b-5)$  IV. bölgede ve  $B(a+1, b-1)$  noktası II. Bölgede ise  $a+b$  nin ve  $b-a$  nın almayacağı tamsayı değerleri toplamı kaçtır?

## Şimetre:



A(a,b) noktasının B(c,d) noktasına göre simetriği C(x<sub>0</sub>,y<sub>0</sub>) ise  $x_0 = c + (c - a)$  ve  $y_0 = d + (d - b)$  dir.



Örnek:

A(1,2) noktasının B(3,2) noktasına göre simetriğinin C(-1,-7) noktasına göre simetriğinin koordinatları toplamı kaçtır?

Çözüm:

Önce apsilerin simetriğini bulalım;

1→3 →? (1 den 3 e 2 artmış, 2 daha artar) = 5

5→-1 →? (5 den -1 e 6 azalmış, 6 daha azalır) = -7

Şimdiyse ordinatların simetriğini bulalım;

2→2 →? (2 den 2 e 0 artmış, 0 daha artar) = 2

2→-7 →? (2 den -7 e 9 azalmış, 9 daha azalır) = -16

A(1,2) → B(3,2) → X(5,2) → C(-1,-7) → Y(-7,-16)

(cvp: -7+-16=-23)

Sorular:

- 1) (-1,-2) noktasının (-4,2) noktasına göre simetriğinin orijine göre simetriğinin koordinatları toplamı kaçtır?
- 2) (x,y) noktasının (7,2) noktasına göre simetriğinin orijine göre simetriği (12,8) olduğuna göre, x+y toplamı kaçtır?
- 3) A(x,y) noktasının B(1,2) noktasına göre simetriği C(z,t) noktası olduğuna göre x+z-y+t kaçtır?
- 4) A(x,y) noktasının B(2,-6) noktasına göre simetriğinin C(8,-2) noktasına göre simetriği D(z,t) olduğuna göre x+y+z+t kaçtır?

\* 3. soruda A ve C noktasıyla oluşturduğumuz [AC] doğru parçasının orta noktası B noktasıdır. 4. sorudaysa [BC] doğru parçasının orta noktasıyla [AD] doğru parçasının orta noktası aynıdır; (5,-4).

\* Bir doğru parçasının orta noktasının apsisi, uç noktalarının apsileri toplamının yarısı, ordinatı ise uç noktaların ordinatları toplamının yarısıdır.

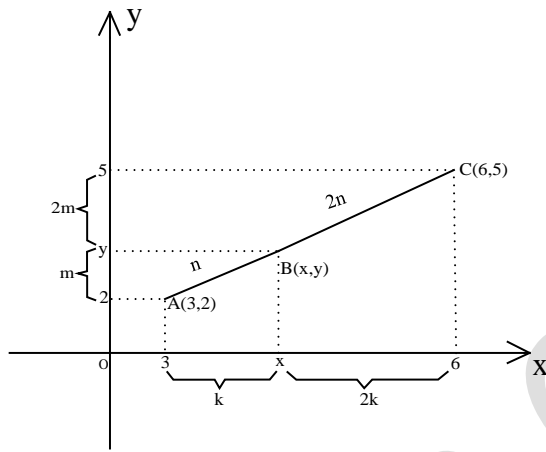
$$(2,-11) \text{ ve } (-8,23) \text{ noktalarının orta noktası } ([2+(-8)]/2, [(-11)+23]/2) = (-3,6)$$

- ♦ ⊗ ♦ -

Örnek:

$B \in [AC]$  olmak üzere  $A(3,2)$ ,  $B(x,y)$ ,  $C(6,5)$  ve  $|BC|=2|BA|$  ise  $x+y$  toplamı kaçtır?

Çözüm:



$3k=6-3=3$  ise  $k=1$  dolayısıyla  $x=3+1=4$   
 $3n=5-2=3$  ise  $n=1$  dolayısıyla  $y=2+1=3$   
 Böylece  $B(4,3)$  bulunur.

Ancak tıpkı simetride yaptığımız gibi artımları hesaplayarak sonuca ulaşabiliriz:  
 Apsis: 3den 6 ya üç birimde 3 artmış, bir birimde 1 artar öyleyse  $3+1=4$   
 Ordinat: 2den 5e üç birimde 3 artmış, bir birimde 1 artar öyleyse  $2+1=3$

Örnek:

$C \in ([AB] \setminus [AB])$  olmak üzere  $A(7,2)$ ,  $B(2,5)$ ,  $C(x,y)$  ve  $|AC|=3|AB|$  ise  $x+y$  toplamı kaçtır?

Çözüm:

$|AB|$  bir birimse  $|BC|$  iki birimdir.

Apsis: 7den 2ye bir birimde 5 azalmış (Adan Bye 5 azalmış), iki birimde 10 azalır (Bden Cye 10 azalır).  $x = 2 - 10 = -8$

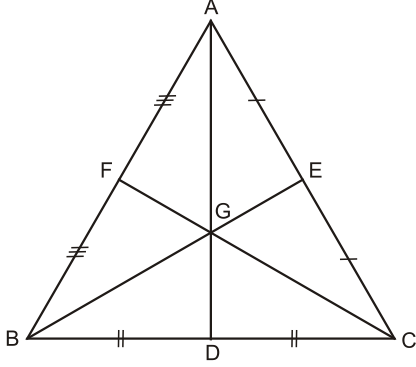
Ordinat: 2den 5e bir birimde 3 artmış (Adan Bye 3 artmış), iki birimde 6 artar (Bden Cye 6 artar).  $y = 5 + 6 = 11$

Böylece  $x+y = -8 + 11 = 3$

Sorular:

- 1)  $B \in [AC]$  olmak üzere  $A(-1,-4)$ ,  $B(3,4)$ ,  $C(x,y)$  ve  $|AC|=4|AB|$  ise  $x+y$  toplamı kaçtır?
- 2)  $B \in [AC]$  olmak üzere  $A(a,b)$ ,  $B(5,1)$ ,  $C(a+3,b-3)$  ve  $|AB|=2|BC|$  ise  $a+b$  toplamı kaçtır?
- 3)  $C \in ([AB] \setminus [AB])$  olmak üzere  $A(a,b)$ ,  $B(2,5)$ ,  $C(c,d)$  ve  $|AC|=2|AB|$  ise  $a+b+c+d$  toplamı kaçtır?
- 4)  $C \in ([BA] \setminus [AB])$  olmak üzere  $A(1,1)$ ,  $B(2,3)$ ,  $C(x,y)$  ve  $|AC|=2|AB|$  ise  $x+y$  toplamı kaçtır?

## Üçgenin Ağırlık Merkezi ve Alanı:



$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

$$A(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Örnek:

A(3,2), B(4,6) ve C(5,4) olmak üzere ABC üçgeninin ağırlık merkezinin koordinatlarını ve üçgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm:

$$x_G = (3+4+5)/3=4 \text{ ve } y_G = (2+6+4)/3=4 \rightarrow G(4,4)$$

$$A(ABC) = 1/2 |(3.6+4.4+5.2) - (2.4+6.5+4.3)| = 1/2 |(44-50)| = 1/2 (6) = 3 \text{ br}^2$$

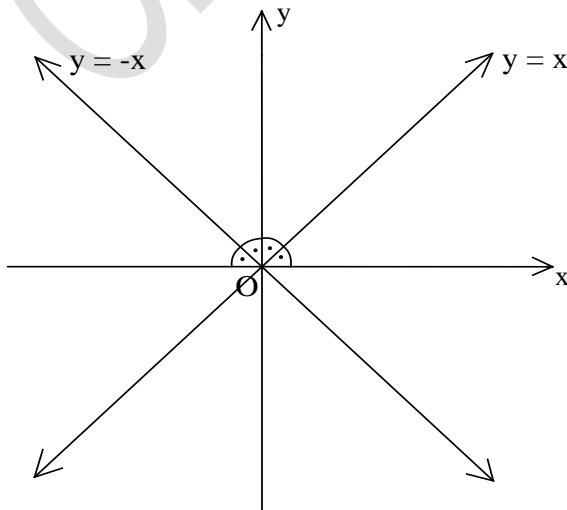
## Bir Noktanın Eksenlere ve Orijine göre Simetriği:

\* **(a,b)** nin **x-eksenine** göre simetriği,  $y=0$  doğrusuna göre simetriği alınarak yapılır.  $y=0$  doğrusunda  $x$  ile ilgili bilgi olmadığından;  $b \rightarrow 0 \rightarrow -b$  ( $b$  'den  $0$  'a  $b$  kadar azalır,  $0$  'dan  $b$  kadar azalırsa  $-b$  bulunur) dolayısıyla  $(a,b)$  nin  $x$ -eksenine göre simetriği **(a,-b)** olur.

\* **(a,b)** nin **y-eksenine** göre simetriği,  $x=0$  doğrusuna göre simetriği alınarak yapılır.  $a \rightarrow 0 \rightarrow -a$  dolayısıyla  $(a,b)$  nin  $y$ -eksenine göre simetriği **(-a,b)** olur.

\* **(a,b)** nin **orijine** göre simetriği, noktaya göre simetri ile aynıdır.  $(a,b) \rightarrow (0,0) \rightarrow (-a,-b)$

## Bir Noktanın I.Açıortay ve II. Açıortay doğrularına göre Simetriği:



$y=x$  doğrusuna I.Açıortay Doğrusu  
 $y=-x$  doğrusunaysa II.Açıortay Doğrusu  
denir.

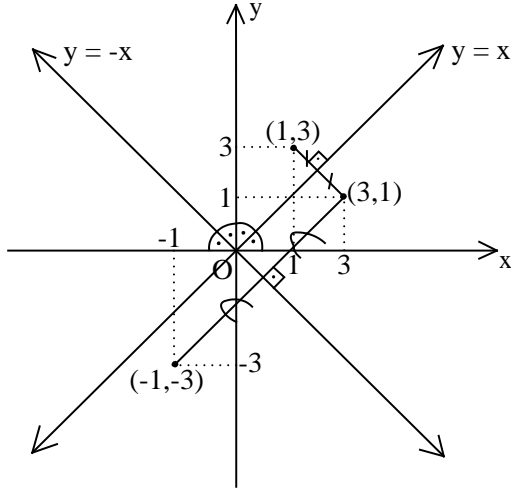
$y=x$  doğrusu üzerinde her noktanın apsisi  
ordinatına eşittir.  $(-1,-1)$ ,  $(14,14)$  vb. Genel  
olarak  $(x,x)$ .

$y=-x$  doğrusu üzerinde her noktanın apsisi  
ordinatının negatifine eşittir.  $(-1,1)$ ,  $(1,-1)$ ,  
 $(2,-2)$ ,  $(-7,7)$  vb. Genel olarak  $(x,-x)$ .

Örnek:

(1,3) noktasının I.açıortay doğrusuna göre simetriğinin II. açıortay doğrusuna göre simetriği nedir?

Çözüm:



Yandaki şekilde (1,3) noktasının  $y=x$  doğrusuna göre simetriği (3,1). (3,1) in  $y=-x$  e göre simetriği (-1,-3) bulunur.

\*  $y=x$  'e ve  $y=-x$  'e göre peş peşe yapılan simetri *orijine* göre simetri yapmakla eş değerdedir.

Sonuç olarak;

I.Açıortay doğrusuna göre simetri:

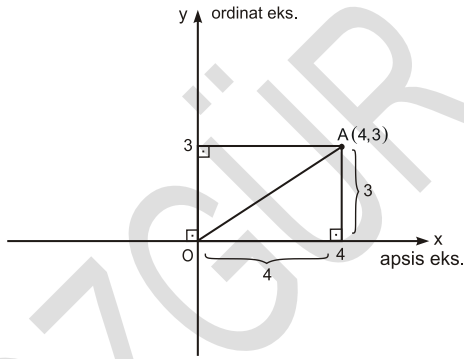
$$(a,b) \rightarrow (b,a)$$

II.Açıortay doğrusuna göre simetri:

$$(a,b) \rightarrow (-b,-a)$$

### İki Nokta Arasındaki Uzaklık:

a) Bir noktanın Orijine uzaklığı



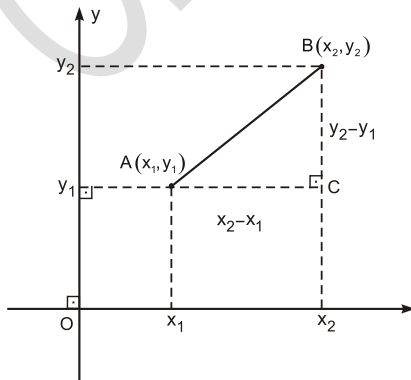
A noktasının apsisi: 4

A noktasının ordinatı: 3

$$|AO|^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$|AO| = 5 \text{ birim}$$

b) İki nokta arasındaki uzaklık



$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Örnek:

A(3,1), B(-3,-4) ve C(-3,-1) ise  $|AB|$  ve  $|BC|$  kaçtır?

Çözüm:

$$|AB|^2 = (3 - (-3))^2 + (1 - (-4))^2 = 6^2 + 5^2 = 61 \rightarrow |AB| = \sqrt{61} \text{ br}$$

$$|BC|^2 = (-3 - (-3))^2 + (-4 - (-1))^2 = 0^2 + (-3)^2 = 9 \rightarrow |BC| = 3 \text{ br}$$

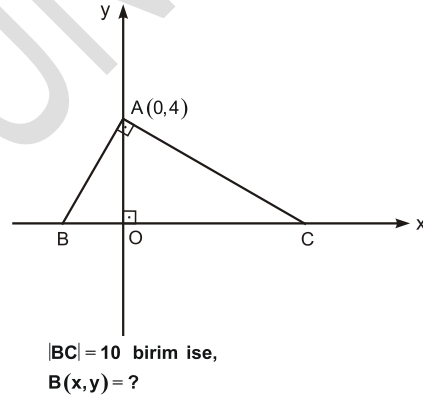
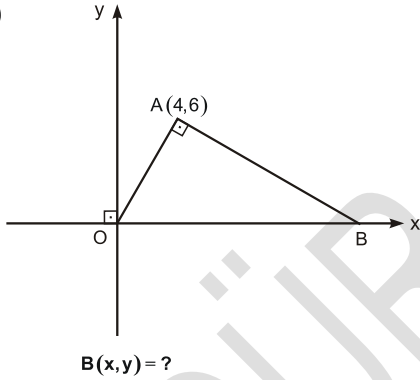
Sorular:

- 1) A( $\sqrt{6}$ , 3), B( $2\sqrt{6}$ , -5) ve O-orijin olmak üzere  $|AB| + |BO|$  toplamı kaçtır?
- 2) A(1,3), B(3,4) ve C(2,2) olmak üzere ABC üçgeninin ağırlık merkezinin A noktasına uzaklığı kaç birimdir?
- 3) A(a,3) ve B(4,b) noktalarının Orijine uzaklıkları eşittir.  $a, b \in \mathbb{Z}$  olduğuna göre  $|AB|$  uzunluğu kaçtır?
- 4) A(a+2, b-1) ve B(a-2, b+3) olduğuna göre  $|AB|$  uzunluğu kaçtır?

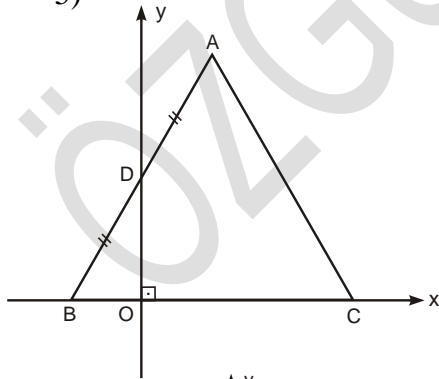
Ödevler:

- 1) (5-a, 7-a) noktası II. bölgede ise, a hangi tamsayı değerini alır?
- 2) A(k, -4) noktası orijine 5 birim uzaklıkta ise, k hangi değerleri alır?
- 3) A(k+4, k-2) nin Oy eksenine göre simetriği III. bölgede ise, k kaç farklı tamsayı değeri alır?

4)

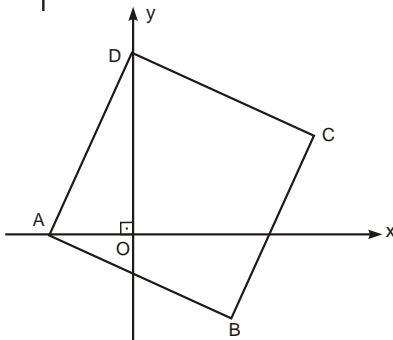


5)



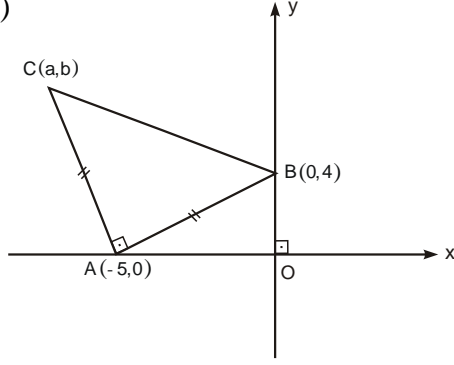
ABC eşkenar üçgen C(6,0) ise, A(x,y)=?

6)



A(-1,0), D(0,3) ve ABCD kare ise, B ve C nin koordinatları nedir?

7)

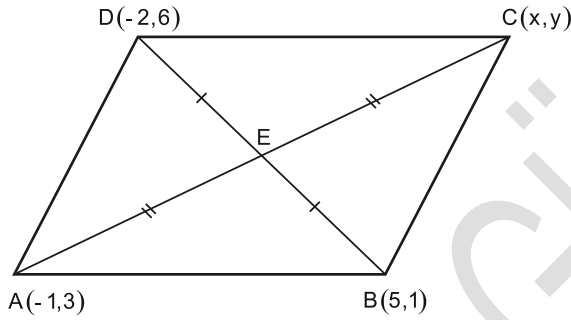


ABC ikizkenar dik üçgen ise,  $a+b = ?$

8)  $A(k-2,4)$ ,  $B(1,k-3)$  ve  $|AB| = 2\sqrt{2}$  br ise,  $k=?$

9)  $A(1,-2)$ ,  $B(-3,-6)$ ,  $[AB]$  nin orta noktası  $C$  dir.  $C$  nin  $Ox$ 'e göre simetriği nedir?

10)

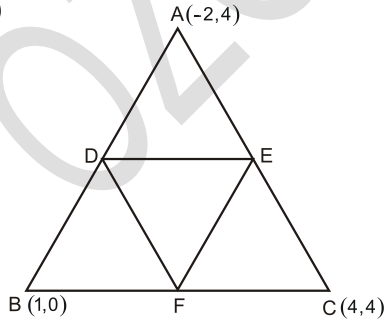


ABCD paralelkenar ise,  
 $E(a,b)$  ve  $C(x,y)$  nedir?

11)  $A(1,4)$ ,  $B(2,1)$ ,  $C(x,y)$   $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{1}{4}$  ise,  $C(x,y) = ?$

12)  $A(1,5)$ ,  $B(3,7)$  olmak üzere  $[AB]$  yi  $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{1}{3}$  oranında dıştan bölen  $C$  noktasının koordinatları nedir?

13)



D, E, F orta noktalar ise,

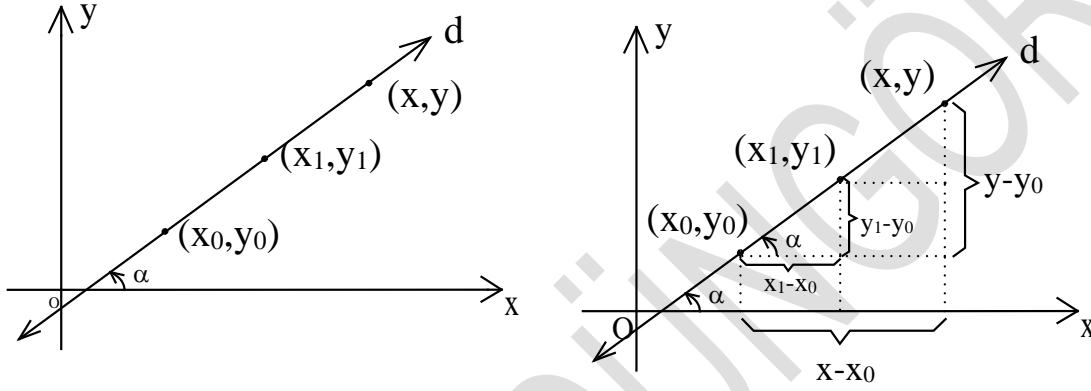
DEF üçgeninin ağırlık merkezini ve alanını bulunuz.

## Doğrunun Analitik İncelemesi

Bir doğrunun üzerindeki noktalar aynı bir belli kuralı sağlayan noktalardır. Örneğin  $y=x$  (I.Açıortay doğrusu) üzerindeki her noktanın apsisi ordinatına eşittir veya  $y=2x-1$  doğrusu üzerindeki noktaların ordinatları, apsisinin iki katının bir eksisidir.

Bir başka kural; bir doğru üzerinden seçilen her iki noktanın ordinatları farkının apsileri farkına oranının sabit oluşudur. Bu sabite *Doğrunun Eğimi* (doğrunun Ox ekseninin pozitif tarafıyla yaptığı açının *Tanjantı*) denir ve  $m$  ile gösterilir.

$$\exists x_0, y_0, x_1, y_1 \in \mathbf{R}; \forall x, y \in \mathbf{R}; (x, y), (x_0, y_0) \text{ ve } (x_1, y_1) \in d$$



### II. İki Noktası Bilinen Doğru Denklemi

$$\tan \alpha = m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = m$$

I. Eğim Formülü

III. Eğimi ve Bir Noktası Bilinen Doğru Denklemi

I.  $\tan \alpha = m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

II.  $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$

III.  $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$

Örnekler:

- 1) (3,-4) ve (-12,5) noktalarından geçen doğrunun eğimi kaçtır?
- 2) (3,-4) ve (-12,5) noktalarından geçen doğrunun denklemi nedir?
- 3) (3,-4) noktasından geçen ve eğimi  $-\frac{3}{5}$  olan doğrunun denklemi nedir?



4)  $(-12,5)$  noktasından geçen ve eğimi  $-\frac{3}{5}$  olan doğrunun denklemi nedir?

5)  $(2\sqrt{2}, 3\sqrt{6})$  ve  $(4\sqrt{2}, 5\sqrt{6})$  noktalarından geçen doğrunun eğim açısı kaç derecedir?

Çözümler:

$$1) \frac{5 - (-4)}{-12 - 3} = \frac{9}{-15} = -\frac{3}{5}$$

$$2) \frac{5 - (-4)}{-12 - 3} = \frac{y - (-4)}{x - 3} \rightarrow -\frac{3}{5} = \frac{y + 4}{x - 3} \rightarrow -3x + 9 = 5y + 20 \rightarrow 3x + 5y + 11 = 0$$

$$3) -\frac{3}{5} = \frac{y + 4}{x - 3} \rightarrow -3x + 9 = 5y + 20 \rightarrow 3x + 5y + 11 = 0$$

$$4) -\frac{3}{5} = \frac{y - 5}{x - (-12)} \rightarrow -3x - 36 = 5y - 25 \rightarrow 3x + 5y + 11 = 0$$

$$5) \frac{3\sqrt{6} - 5\sqrt{6}}{2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{6}}{-2\sqrt{2}} = \sqrt{3} \rightarrow \tan\alpha = \sqrt{3} \rightarrow \alpha = 60^\circ$$

\*  $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$  denklemi içler-dışlar çarpımı yapılarak  $y - y_0 = m(x - x_0)$  olarak da alınabilir.

Dolayısıyla  $y = mx + n$  şeklindeki denklemlerin eğimi  $x$ -değişkeninin katsayısıdır.

\*  $ax + by + c = 0$  şeklinde yazılan (lineer denklem) doğruların eğimini bulalım:

$by = -ax - c \rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \rightarrow m = -\frac{a}{b}, n = \frac{c}{b}$  olduğundan lineer denklemlerde eğim  $x$ 'in katsayısının  $y$ 'nin katsayısına bölümünün negatifi olarak bulunur.

Örnekler:

1)  $y = mx + n$  doğrusu  $(3,4)$  ve  $(4,3)$  noktalarından geçtiğine göre,  $m=?$  ve  $n=?$

2)  $3x - 4y + 12 = 0$  doğrusunun eğimi kaçtır?

3)  $-4x + 7y - 11 = 0$  doğrusu  $(-1,a)$  noktasından geçtiğine göre,  $a=?$

4)  $mx - ny - 12 = 0$  doğrusu  $(3,0)$  ve  $(2,3)$  noktalarından geçtiğine göre, bu doğrunun eğimi kaçtır?

Çözümler:

$$1) 4 = m3 + n \rightarrow 3m + n = 4 \text{ ve } 3 = m4 + n \rightarrow 4m + n = 3 \quad \begin{array}{r} + \quad 4m + n = \quad + 3 \\ - \quad 3m + n = \quad - 4 \\ \hline m \quad \quad \quad - 1 \end{array} \rightarrow m = -1 \text{ ise}$$

$$3(-1) + n = 4 \rightarrow n = 7$$

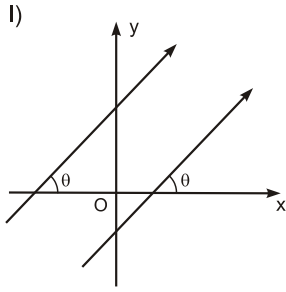
$$2) m = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$3) -4(-1)+7(a)-11=0 \rightarrow 4+7a-11=0 \rightarrow 7a=11-4=7 \rightarrow a=1$$

$$4) m3-n0-12=0 \rightarrow m=4 \text{ ve } 4.2-n3-12=0 \rightarrow n=-\frac{4}{3} \text{ olur, böylece denklem}$$

$$4x - \frac{4}{3}y - 12 = 0 \text{ olduğundan eğim } -\frac{m}{-n} = -\frac{4}{-\left(-\frac{4}{3}\right)} = -3 \text{ bulunur.}$$

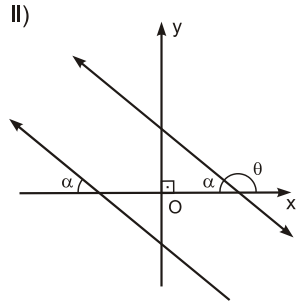
## Eğimin İncelenmesi



$$\hat{\theta} < 90^\circ \Leftrightarrow m > 0$$

$$y = mx + n$$

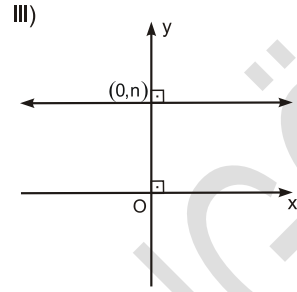
$$f(x) = mx + n$$



$$\hat{\theta} > 90^\circ \Leftrightarrow m < 0$$

$$y = mx + n$$

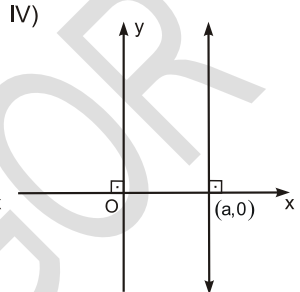
$$f(x) = mx + n$$



$$\hat{\theta} = 0^\circ \Leftrightarrow m = 0$$

$$y = n$$

$$f(x) = n$$

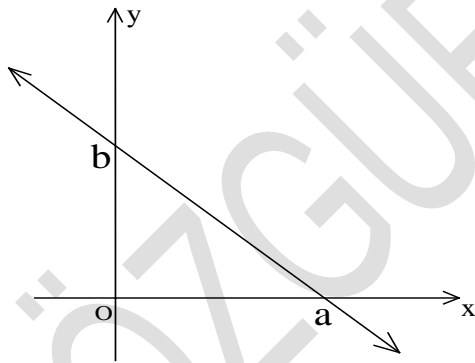


$$\hat{\theta} = 90^\circ \Leftrightarrow m : \text{tanımsız}$$

$$x = a$$

$$?$$

## Eksenini Kestiği Noktaları Bilinen Doğru Denklemi



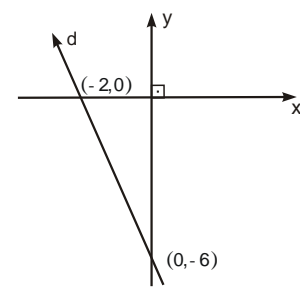
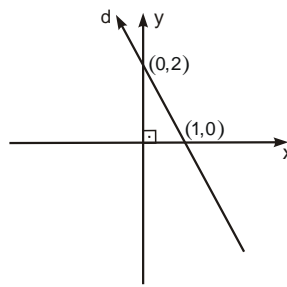
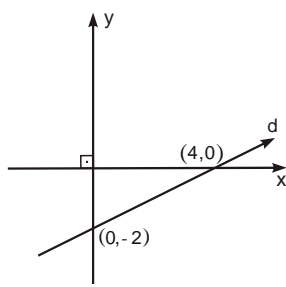
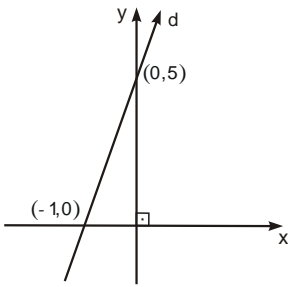
d doğrusu, x eksenini (a,0) noktasında ve y eksenini (0,b) noktasında kesiyor. İki noktası bilindiğinden;

$$\frac{y-0}{x-a} = \frac{b-0}{0-a} \rightarrow -ay = bx - ab$$

$$\rightarrow bx + ay = ab \quad (\text{Her iki tarafı } ab \text{ 'ye bölelim})$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Aşağıda grafikleri verilen doğruların denklemlerini ve eğimlerini yazınız.



## İki Doğrunun Karşılaştırılması

$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$  ve  $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$  doğruları için;

1)  $d_1 \cap d_2 = A \Rightarrow$  Doğrular A noktasında KESİŞİYOR  $\Leftrightarrow m_1 \neq m_2$

2)  $d_1 \cap d_2 = \{ \emptyset \} \Rightarrow$  Doğrular PARALEL  $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$  ve  $m_1 = m_2$

3)  $d_1 \cap d_2 = \{A, B, \dots\} \Rightarrow$  Doğrular ÇAKIŞIK  $d_1 \cong d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$  ve  $m_1 = m_2$

Örnekler:

- 1)  $3x - 2y + 5 = 0$  doğrusu,  $6x + ay + 5 = 0$  doğrusuyla paralel olduğuna göre a kaçtır?
- 2)  $7x + y - 8 = 0$  doğrusu,  $21x - ay + b = 0$  ile çakışık ise a=? b=?

Çözümler:

1)  $m_1 = m_2$  olacağından  $-\frac{3}{-2} = -\frac{6}{a} \Rightarrow a = -4$

2) İkinci denklemi 3 e bölersek  $7x - \frac{a}{3}y + \frac{b}{3} = 0$  elde edilir. Öyleyse her iki denklemin

katsayıları birbirine eşit olacağından;  $1 = -\frac{a}{3} \Rightarrow a = -3$ ,  $-8 = \frac{b}{3} \Rightarrow b = -24$  bulunur.

İlk denklemi 3 ile çarpmak da aynı sonucu verecektir  $\Rightarrow 21x + 3y - 24 = 0$

## Kesişen iki doğrunun kesişim noktasını bulmak

$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$        $d_1$  ve  $d_2$  doğrularının kesişim noktasını bulmak için denklem  
 $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$       sistemi çözülür.

Örnek:

$y = 2x - 1$  doğrusu ile  $y = -3x + 4$  doğrusunun kesişim noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:

$y = 2x - 1 = -3x + 4 \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1$  bulduğumuz bu x değerini denklemlerden birinde yerine koyalım:  $y = 2(1) - 1 = 1$  olduğundan bu iki doğrunun kesişim noktası (1,1) dir.

Örnek:

$2x - 5y + 8 = 0$  ve  $3x + 4y - 6 = 0$  doğrularının kesişim noktasını bulunuz.

Çözüm:

I- Denklemlerden birinden değişkenlerden biri çekilir (x veya y) diğerinde yerine yazılır:

$$y = \frac{2x + 8}{5} \Rightarrow 3x + 4\left(\frac{2x + 8}{5}\right) - 6 = 0 \Rightarrow \frac{15x + 8x + 32 - 30}{5} = 0 \Rightarrow 23x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{23}$$

Bulduğumuz bu x değerini denklemlerden birinde yerine yazarak y değerine ulaşabiliriz.

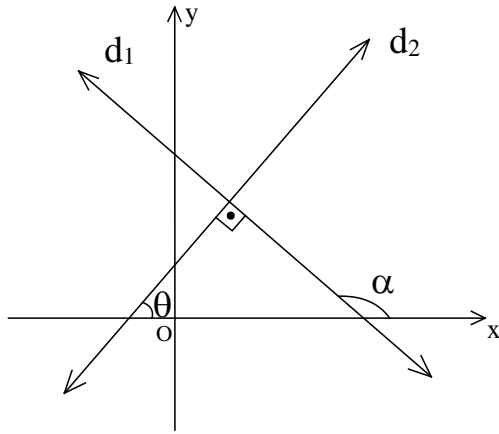
$$2\left(-\frac{2}{23}\right) - 5y + 8 = 0 \Rightarrow -4 - 115y + 184 = 0 \Rightarrow 180 = 115y \Rightarrow 36 = 23y \Rightarrow y = \frac{36}{23}$$
 bulunur.

II- Denklem sistemi çözümlenir:

$$\begin{array}{rclclcl} 2x-5y+8= & 0 & +3/ & 2x-5y+8= & 0 & 6x-15y+24= & 0 & 6x-15y+24= & 0 \\ 3x+4y-6= & 0 & -2/ & 3x+4y-6= & 0 & -6x-8y+12= & 0 & -6x-8y+12= & 0 \\ & & & & & & & -23y+36= & 0 \end{array}$$

Böylece  $y = \frac{36}{23}$  bulunur. I. yöntemdeki gibi y değerini denklemlerden birinde yerine yazarak x değerine ulaşabiliriz.

### Dik Kesişen Doğrular

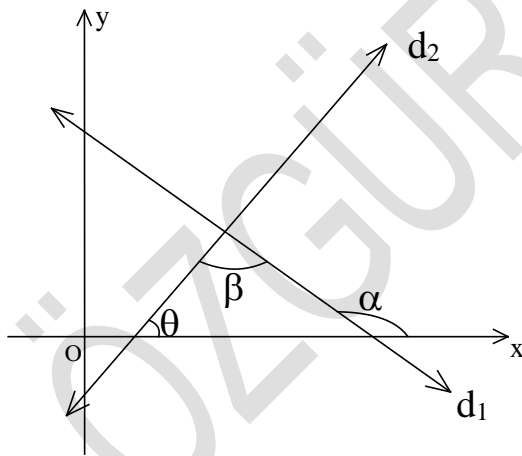


$$m_1 = \tan \alpha \text{ ve } m_2 = \tan \theta \text{ } (\alpha = 90^\circ + \theta)$$
$$\tan \alpha = \tan(90^\circ + \theta) = -\cot \theta$$

$$m_1 \cdot m_2 = -\cot \theta \cdot \tan \theta = -1$$

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

### Kesişen İki doğru Arasındaki Açının Tanjantı

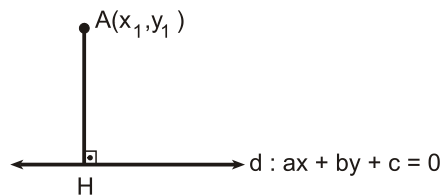


$$m_1 = \tan \alpha \text{ ve } m_2 = \tan \theta \text{ } (\alpha = \beta + \theta)$$

$$\tan \beta = \tan(\alpha - \theta) = \frac{\tan \alpha - \tan \theta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \theta}$$

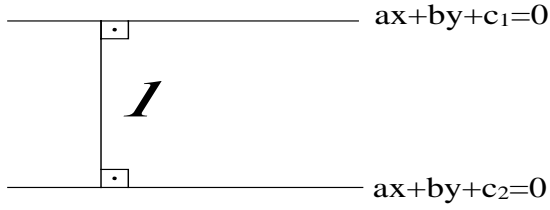
$$\tan \beta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

### Bir Noktanın Bir Doğruya olan Uzaklığı



$$[AH] \perp d \text{ ise } |AH| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık



$$l = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Örnek:

$d_1: 6x-2y-4=0$  doğrusunun  $d_2: y=3x+4$  doğrusuna uzaklığı kaç birimdir?

Çözüm:

I-  $6x-2y-4=0 \rightarrow 3x-y-2=0$  ve  $y=3x+4 \rightarrow 3x-y+4=0$

$$l = \frac{|-2-4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

II- Paralel doğruların birinden bir nokta seçilir ( Genel olarak apsisi ya da ordinatı sıfır olan bir nokta -eksenleri kestiği noktalardan biri- seçilmelidir ) ve bu noktanın diğer doğruya uzaklığı hesaplanır.

$x=0$  seçersek  $6(0)-2y-4=0 \rightarrow y = -2$  olduğundan  $(0,-2)$  noktası  $d_1$  üzerindedir.

Bu durumda  $(0,-2)$  noktasının  $d_2$  doğrusuna uzaklığı hesaplanır:

$$\frac{|3(0) - (-2) + 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

## Geometrik Yer Soruları

- 1)  $2x-3y+3=0$  doğrusuyla  $2x-3y+5=0$  doğrusuna eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri nedir?
- 2)  $2x-3y+3=0$  doğrusuyla  $3x-2y+5=0$  doğrusuna eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri nedir?
- 3)  $\mathbb{R}^2$  de apsisi ordinatının yarısı olan noktaların geometrik yer denklemi nedir?
- 4)  $\mathbb{R}^2$  de ordinatı apsisinin karesi olan noktaların geometrik yer denklemi nedir?
- 5)  $\mathbb{R}^2$  de sabit bir noktaya uzaklıkları sabit olan noktaların geometrik yeri nedir?
- 6) Düzlemde  $A(4,7)$  ve  $B(3,6)$  noktalarına eşit uzaklıktaki noktalar arasındaki bağıntı nedir?

Çözümler:

1) Söz konusu noktalardan biri  $P(x,y)$  olsun.  $P$  noktasının her iki doğruya da uzaklığı eşit olduğundan:

$$\frac{|2x-3y+3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|2x-3y+5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} \rightarrow |2x-3y+3| = |2x-3y+5| \text{ mutlak değer açıldığında}$$

$4x-6y+8=0$  yani  $2x-3y+4=0$  doğrusu bulunur. Bu doğru diğer iki paralel doğruya paralel ve onların tam ortasından geçen doğrudur.

$$\text{-----} 2x-3y+3=0$$

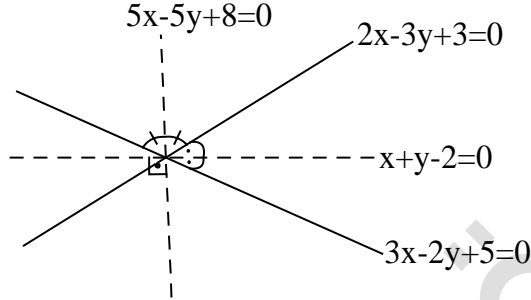
$$\text{-----} 2x-3y+4=0$$

$$\text{-----} 2x-3y+5=0$$

2) Aynı işlemler yapıldığında;

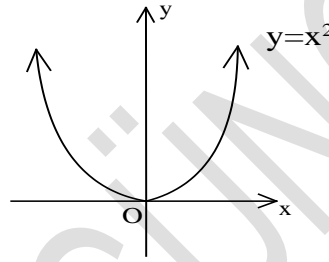
$$\frac{|2x-3y+3|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{|3x-2y+5|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} \rightarrow |2x-3y+3| = |3x-2y+5| \text{ mutlak değer açıldığında iki farklı}$$

doğru denklemi bulunur;  $x+y-2=0$  ve  $5x-5y+8=0$ . Böylece verilen doğruların Açıortay doğruları bulunur.



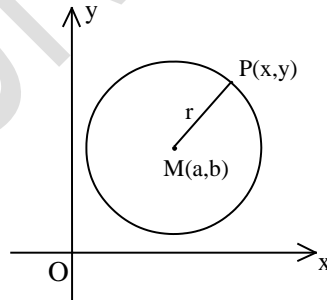
3)  $(x,y) \rightarrow (x,2x) \rightarrow y=2x$  (Eğimi 2 olan ve orijinden geçen bir doğru)

4)  $(x,y) \rightarrow (x, x^2) \rightarrow y=x^2$  (Parabol)



5) Sabit nokta  $M(a,b)$  sabit uzaklık  $r$  olsun. Özelliği sağlayan noktalardan biri  $P(x,y)$  seçilsin.

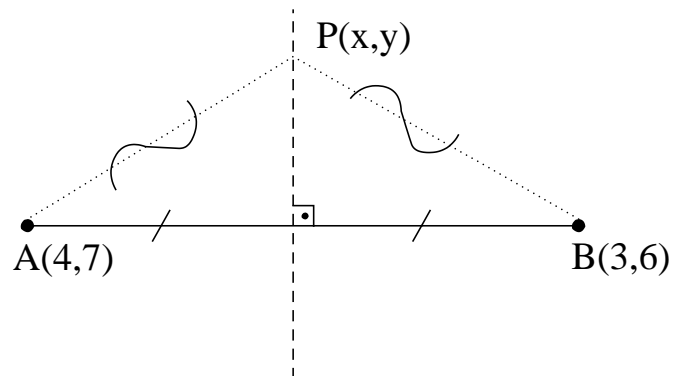
$$|PM| = r \text{ birim} \rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \text{ her iki tarafın karesi alınırsa,} \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \text{ denklemi bulunur (Çember Denklemi).}$$



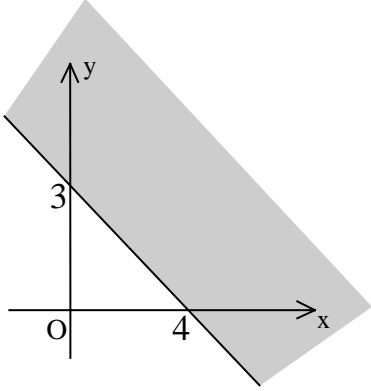
6) Eşit uzaklıktaki nokta  $P(x,y)$  olsun. O halde  $|PA| = |PB|$  olacağından iki nokta arasındaki uzaklık formülünü yazalım:

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} \\ (x-4)^2 + (y-7)^2 = (x-3)^2 + (y-6)^2 \\ -8x+16-14y+49 = -6x+9-12y+36 \\ x+y-10=0 \text{ doğru denklemi bulunur.}$$

Geometrik yer,  $[AB]$  doğru parçasının Orta Dikme doğrusu olarak bulunur.



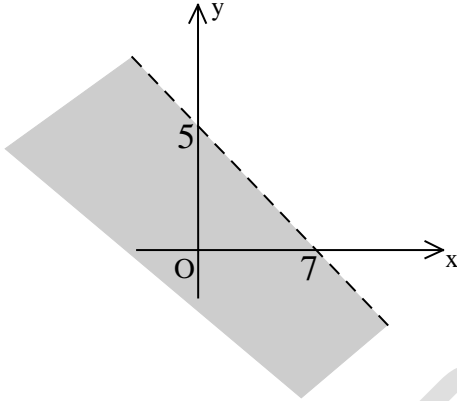
## Bölge Denklemleri



$x/4+y/3=1$  ( $x/4+y/3=1 \rightarrow 3x+4y-12=0$ ) doğrusu ve taralı alanla belirlenen bölgenin denklemi aşağıdakilerden hangisidir:

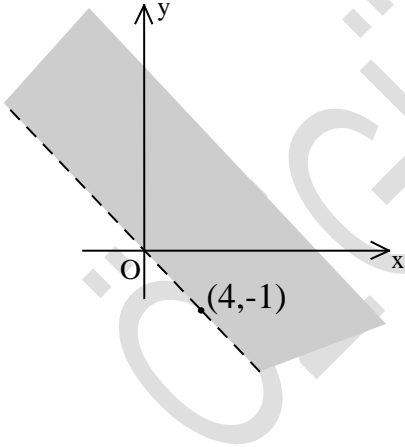
- A)  $3x+4y-12 < 0$
- B)  $3x+4y-12 > 0$
- C)  $3x+4y-12 \geq 0$
- D)  $3x+4y-12 \leq 0$

Bölgede olmayan  $O(0,0)$  noktası bölge denklemini sağlamamalıdır. Bu durumda B ve C şıkları Orijini sağlamaz ancak doğrunun bölgeye dâhil olma durumunu yalnız C şıkkı vermektedir; cevap C.



I)  $x/7+y/5=1 \rightarrow 5x+7y-35=0$

II)  $O(0,0)$  bölge denklemini sağlamalıdır. Denkleme koyduğumuzda  $0+0-35$  sıfırdan küçük olduğu için bölge denkleminin  $5x+7y-35 < 0$  bulunur (Doğru bölgeye ait değil dolayısıyla " $\leq$ " yerine " $<$ " kullandık).



Orijinden geçen doğruyla sınırlı bölge denklemlerinde;

I) Doğru denklemi tespit edilir:

İki noktası bilinen doğru denkleminde  $(O(0,0)$  ve  $(4,-1)$ ) bulunabileceği gibi eğimi ve bir noktası bilinen  $(m=-4$  ve  $(0,0)$ ) doğru denklemi hesabıyla da denklem elde edilebilir.

$$4y=x \rightarrow x-4y=0$$

II) taralı bölgeden herhangi bir nokta seçilir:  $(1,1)$

$$4(1) > 1 \text{ olduğundan denklemimiz } 4y > x \text{ bulunur.}$$

## Bir Noktanın Eğimi $\pm 1$ olan Doğruya göre Simetriği

\* $(1,2)$  noktasının  $y=x-4$  doğrusuna göre simetriğini bulalım.

Nokta sanki doğruyu sağlıyormuş (denklemi denkleştirmiş gibi) gibi denkleme apsisini koyup simetriğinin ordinatını ve ordinatını koyup simetriğinin apsisini bulabiliriz.

$y=(1)-4=-3$  ( Simetrik noktanın Ordinatu) ve  $(2)=x-4$  den  $x=6$  ( Simetrik noktanın apsisi)  
 $(1,2) \xrightarrow{y=x-4} (6,-3)$  bulunur.

\* $(-3,-8)$  noktasının  $5x+5y+12=0$  doğrusuna göre simetriğini bulalım.

$$(-3,-8) \xrightarrow{5x+5y+12=0} \left( \frac{28}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

NOT: Bulduğumuz simetri noktasıyla verilen ilk noktanın oluşturduğu doğru parçasının orta noktası mutlaka verilen doğru üzerinde olmalıdır, böylece sağlama yapmış oluruz.

### **Bir Doğrunun Bir Noktaya göre Simetriği**

$2x-5y+10=0$  doğrusunun  $(3,4)$  noktasına göre simetriğini bulalım.

Doğru üzerinden iki nokta seçilir ve bu noktaların simetrikleri üzerinden geçen doğru denklemi yazılarak sonuca ulaşılır.

$(0,2)$  ve  $(-5,0)$  noktalarının  $(3,4)$  e göre simetrikleri  $X(6,6)$  ve  $Y(11,8)$  olur.  $X$  ve  $Y$  den geçen doğru denklemi:

$$\frac{6-8}{6-11} = \frac{y-8}{x-11} = \frac{2}{5} \rightarrow 2x-5y+18=0 \text{ olarak bulunur.}$$

NOT: Bir Doğrunun Bir Noktaya göre Simetriği her zaman kendisine paralel bir doğru çıkar.

### **Bir Doğrunun Eğimi $\pm 1$ olan Doğruya göre Simetriği**

\* $2x-3y-6=0$  doğrusunun  $y=x+3$  doğrusuna göre simetriği alınırken simetriği alınacak doğruya  $x$  (simetri alınacak doğruya  $x$  i yalnız bıraktık) yerine  $y-3$ ,  $y$  yerineyse  $x+3$  yazılır.  
 $2(y-3)-3(x+3)-6=0 \rightarrow 2y-6-3x-9-6=0 \rightarrow -3x+2y-21=0 \rightarrow 3x-2y+21=0$

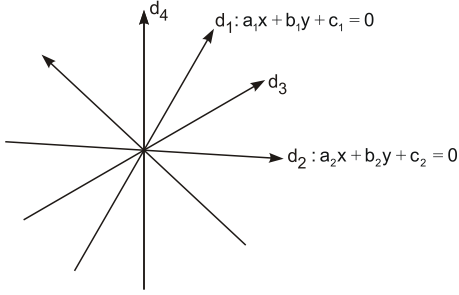
\* $3x-2y+21=0$  doğrusunun  $x+y+3=0$  doğrusuna göre simetriği;  $x:=-y-3$  ve  $y:=-x-3$  olduğundan

$$3(-y-3)-2(-x-3)+21=0 \rightarrow 2x-3y+18=0 \text{ bulunur.}$$

\* $3x-2y+21=0$  doğrusunun  $y=x+3$  doğrusuna göre simetriğinin  $2x-3y-6=0$  olduğunu ve  $2x-3y+18=0$  doğrusunun  $x+y+3=0$  doğrusuna göre simetriğinin  $3x-2y+21=0$  olduğunu bulunuz.



## Doğru Demeti

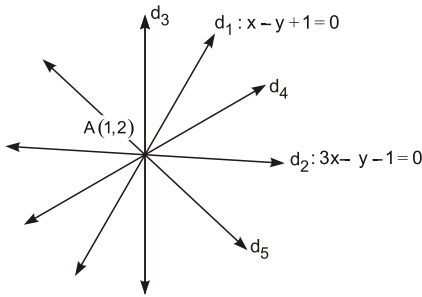


Bir noktadan geçen sonsuz sayıda doğruya *Doğru Demeti* denir.

$$a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

$$(a_1 + ka_2)x + (b_1 + kb_2)y + c_1 + kc_2 = 0$$

Örnek:



$$d_3: x - y + 1 + 2(3x - y - 1) = 0 \Rightarrow 7x - 3y - 1 = 0$$

$$d_4: x - y - 1 - 2(3x - y - 1) = 0 \Rightarrow 5x - y - 3 = 0$$

$$d_5: x - y + 1 - 5(3x - y - 1) = 0 \Rightarrow 7x - 2y - 3 = 0$$

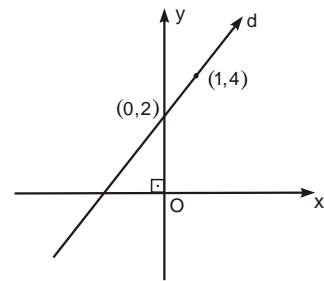
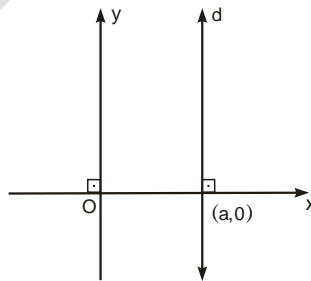
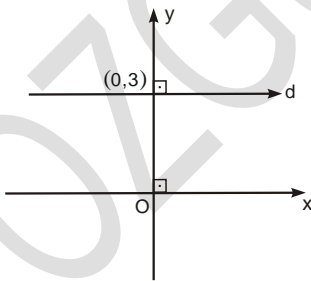
⋮

$$d_n: x - y + 1 + k(3x - y - 1) = 0 \text{ ve } k \in \mathbb{R}$$

$d_3, d_4, d_5, \dots, d_n$  doğrularının  $A(1,2)$  noktasından geçtiğini görürüz.

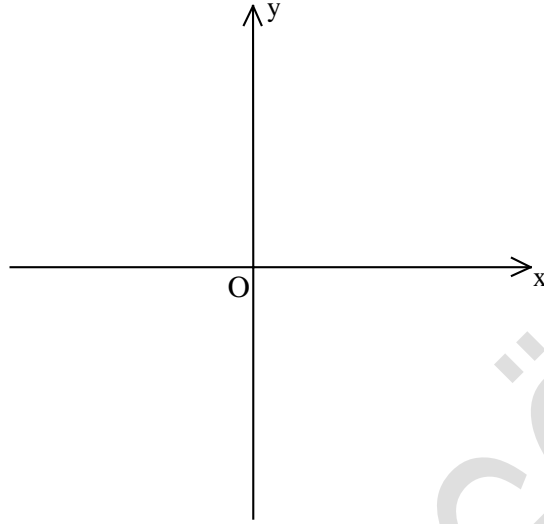
## Sorular

- $2x - y + 4 = 0$  ile  $x + y + 2 = 0$  doğrularının kesişim noktasını bulunuz. (denklemlerini çözünüz)
- Aşağıdaki doğruların denklemlerini yazınız.

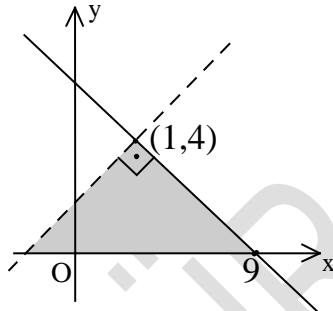


- İki noktası  $A(-1,3)$   $B(4,-2)$  olan doğrunun denklemini nedir?
- $A(2,k)$   $B(-1,6)$  noktalarından geçen doğrunun eğimi  $-3$  ise,  $k$  kaçtır?
- $A(8,-5)$   $B(-4,7)$  noktalarından geçen doğrunun eğim açısı kaç derecedir?
- $A(-1,k)$   $B(3,2)$   $C(5,1)$  noktaları doğrusal ise,  $k$  kaçtır?
- $A(2k-1,5)$   $B(3,k+1)$   $[AB]$  nin orta noktaları kümesinin (geometrik yerinin) denklemini nedir?

8.  $A = \{(x,y) \mid (x+4y-8 \geq 0) \cap (2x-y+6 < 0) \cap (2x \geq y)\}$  ise, A kümesini çizerek gösteriniz.



9.



Yandaki şekildeki taralı bölgenin denklem sistemini yazınız.

10.  $(a-1)x+2y-2=0$  ile  $4x-(a+1)y+2=0$  doğruları dik ise  $a$  kaçtır?
11.  $3x+(3m-4)y+4=0$  ile  $(n+1)x-2y-1=0$  doğruları çakışık ise,  $m.n$  kaçtır?
12.  $x+y-2=0$  ile  $2x+2y-4=0$  denklem sisteminin çözüm kümesi nedir?  
A)  $(-\infty, +\infty)$  B)  $\mathbb{R}$  C)  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  D)  $\emptyset$  E)  $(x, 2-x)$
13.  $x-2y+1=0$ ,  $x+2y-7=0$  ve  $ax+(2a-1)y+4=0$  doğruları aynı noktada kesişiyor ise  $a$  kaçtır?
14.  $3mx+2x-4m+3=0$  doğruları hangi noktada kesişir?
15.  $(2-k)x+(2k-1)y+3=0$  doğrularının kesişim noktasından ve  $(2,1)$  noktasından geçen doğrunun denklemi nedir?
16.  $13x-15y+2=0$  ile  $12x-7y+1=0$  doğrularının kesişim noktasından ve orijinden geçen doğrunun denklemi nedir?
17.  $(1,7)$  noktasının  $x-y-28=0$  doğrusuna göre simetriğinin  $y=x-5$  doğrusuna göre simetriğinin koordinatları nedir?
18.  $2x-y+4=0$  doğrusunun  $y=x-1$  doğrusuna göre simetriğinin  $(2,-1)$  noktasına göre simetriğini bulunuz.

## Soruların Cevapları

### Noktanın Analitiği

Noktanın Bölgelerdeki durumları:

- 1) II veya III    2)  $4 < m < 10$     3) II    4)  $1+2=3$

Simetri:

- 1) 1    2) 38    3) -2    4) 2

İçten-Dıştan Bölme

- 1) 43    2) 6    3) 14    4) -4

İki nokta Arasındaki Uzaklık

- 1)  $\sqrt{70} + 7$  br    2) 1 br    3) 0 br    4)  $4\sqrt{2}$  br

Ödevler:

- 1) 6    2)  $\mp 3$     3) 5    4) (13,0) ve (-2,0)  
5)  $(2, 4\sqrt{3})$     6) B(2,-1) ve C(3,2)    7) C(-9,5)  $\rightarrow -4$     8) 5  
9) (-1,4)    10) E  $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$  ve C(4,4)    11) (5,-8)    12) C<sub>1</sub>(-5,-1) ve C<sub>2</sub>(7,11)  
13) G  $\left(1, \frac{8}{3}\right)$  ve S=3 br<sup>2</sup>

### Doğrunun Analitiği

- 1) (-2,0)  
2)  $y=0$ ,  $x=a$ ,  $y=2x+2$   
3)  $x+y-2=0$   
4)  $k=-3$   
5)  $135^\circ$   
6)  $k=4$   
7)  $x-2y+7=0$   
9)  $x+2y-9 \leq 0$ ,  $2x-y+2 > 0$ ,  $y \geq 0$   
10)  $a=3$   
11)  $m.n=-7$  ( $m=4$ ,  $n=-7/4$ )  
12) Doğrular çakışık olduğundan; A,B ve E çözüm kümesidir(E şikkında  $x \in \mathbb{R}$ ).  
13)  $a=-2/7$   
14) Doğrular paralel doğru demeti oluştururlar.  
15)  $x=2y$   
16)  $y=11x$   
17)  $(1,7) \rightarrow (35,-27) \rightarrow (-32,30)$   
18)  $2x-y+4=0 \xrightarrow{y=x-1} x-2y-7=0 \xrightarrow{(2,-1)} x-2y-1=0$