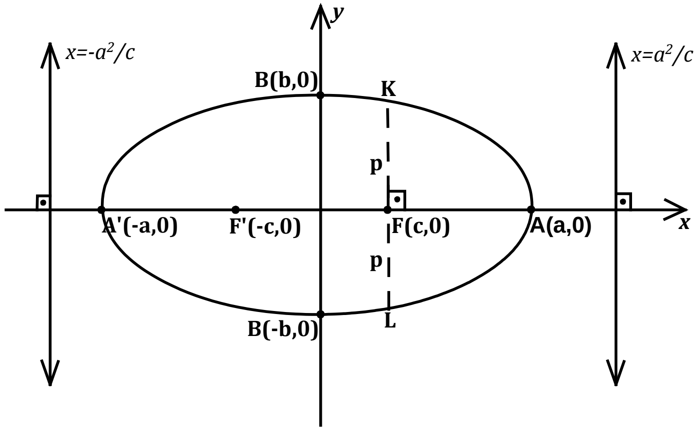
KONİKLER

1.1. ELİPS



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$a^2= b^2+c^2$$

|PF|+|PF'|=2a

Geometrik Yer Denklemi

Dış Merkezlik: e<1

Alanı: πab

Basıklık: $1-\frac{b}{a}$

1.3. ORTAK ÖZELLİKLER

Asal Eksen Uzunluğu: |AA'|=2a

Yedek Eksen Uzunluğu:|BB'|=2b

Odak Uzaklığı: |FF'|=2c

Dış Merkezlik: $e=\frac{c}{a}$

Doğrultman Doğruları: $X=\pm\frac{a^2}{c}$

Asal Çember: $x^2+y^2=a^2$

Yedek Çember: $x^2+y^2=b^2$

Doğrultman Çemberler: $(x\pm c)^2+y^2=4a^2$

Monj (Monge) Çemberi: Elips: $x^2+y^2=a^2+b^2$

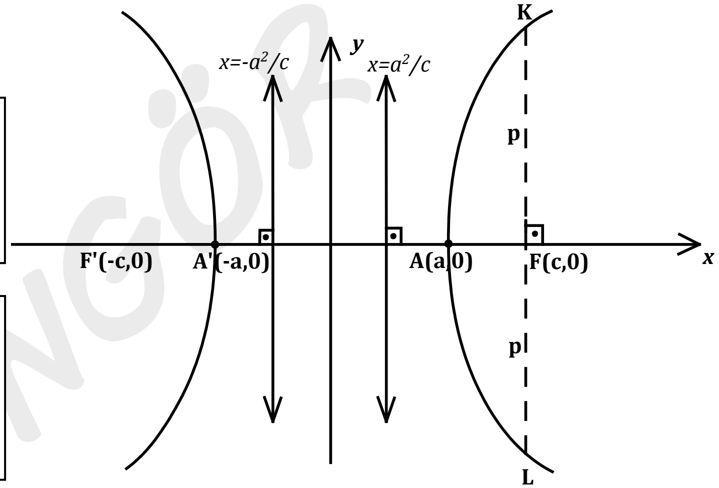
Hiperbol: $x^2+y^2=|a^2-b^2|$

Odaktan Geçen En kısa (Dik) Kirişin Uzunluğu:

$$|KL|=2p=\frac{2b^2}{a}$$

p-*parametre*

1.2. HİPERBOL



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$a^2+b^2=c^2$$

||PF|-|PF'||=2a

Geometrik Yer Denklemi

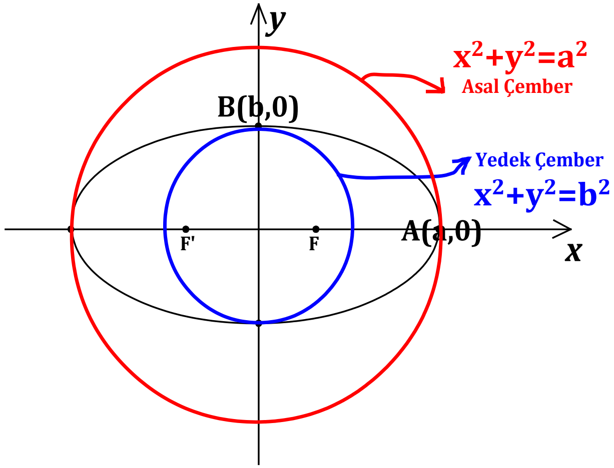
Dış Merkezlik: e>1

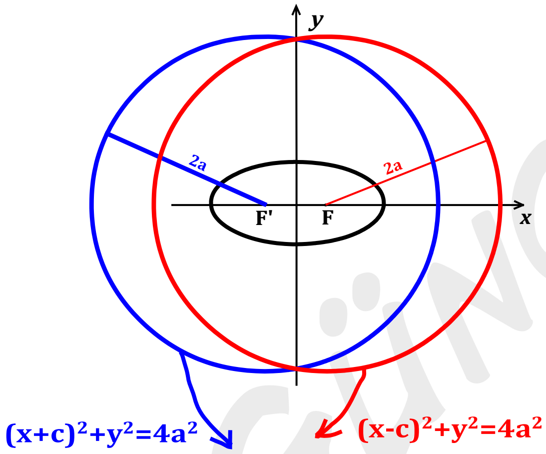
ASİMPTOTLARI:

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

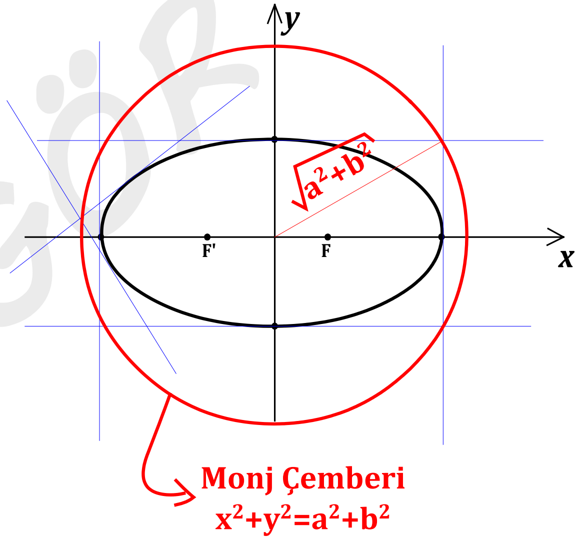
İkizkenar Hiperbol 'de **a=b** dir.

1.3.1. Asal, Yedek, Monj(Dik kesişen teğetlerinin kesişimlerinin geometrik yeri**) ve Doğrultman Çemberler:** Elipsle hiperbolünki aynıdır.

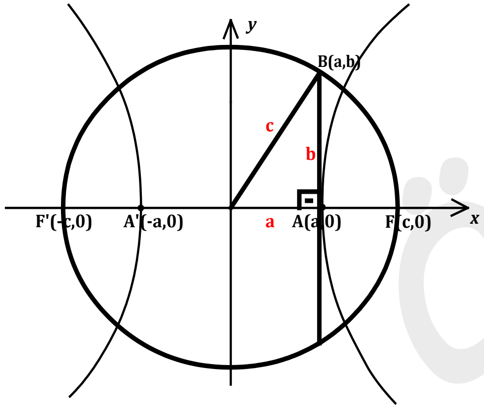


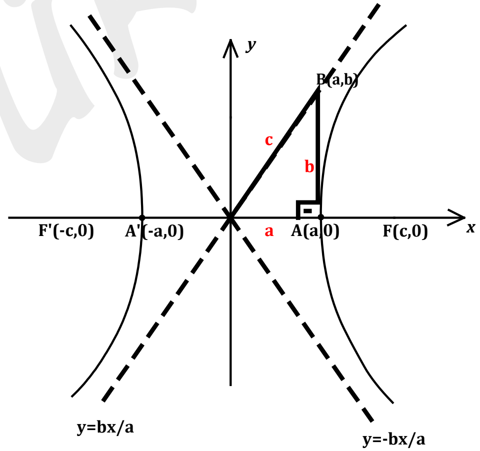


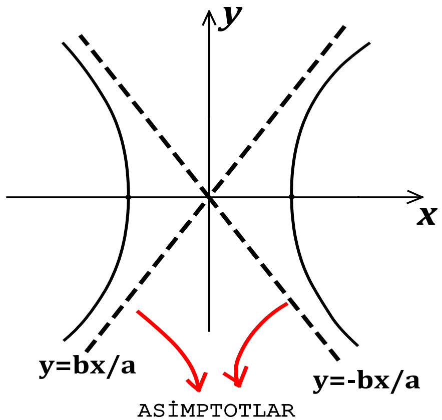
Doğrultman Çemberler



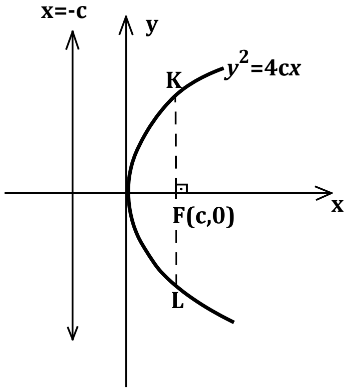
***Merkezil** (merkezi orijinde olan) **Hiperbol** *y-eksenini* kesmediğinden B noktası şekilde görünmez. Aşağıda B diye niteleyebileceğimiz noktayı; **a, b ve c** arasındaki Pisagor ilişkisini ve **asimptotların** durumunu görüyorsunuz.







2. Parabol



Bir Noktaya (***Odak: F***) ve Bir Doğruya (***Doğrutman***: ***x*****=-c**) eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri diye tanımlayabileceğimiz **Parabolün** denklemi $y^2=4cx$ şeklindedir. Bu tanım sebebiyle ***dış merkezlik*** **e=1** 'dir.

Odaktan geçen en kısa (dik) kirişin uzunluğu **|KL|=2p=4c**, ***parametre*** ise **p=2c** dir. Bu sebeple denklemi $y^2=2px$ şeklinde de yazabiliriz.

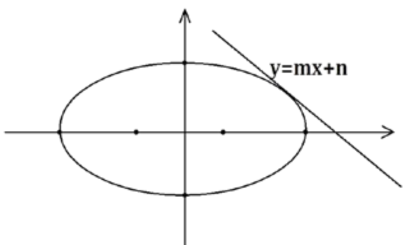
3. TEĞETLİK KOŞULU

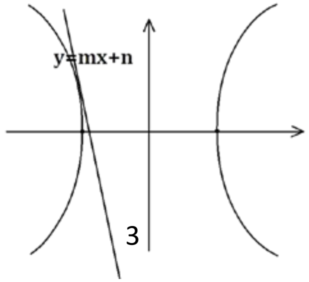
y=mx+n şeklindeki bir doğrunun Elips, Hiperbol veya Parabole teğet olma koşulu, ortak çözümün (*y konik denkleminde yerine yazılarak elde edilen x değişkenine bağlı ikinci dereceden denklem*) deltasının -Δ veya diskriminant- sıfır olmasıdır. Bu hesap yapıldığında aşağıdaki formüllere ulaşılır. [Hatırlatma: Aynı durum çemberde de geçerliyken, biz, merkezin doğruya uzaklığının yarıçap uzunluğu kadar olmasını kullanıyorduk.]

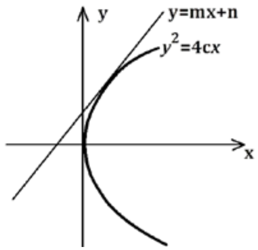
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+n)^2}{b^2}=1}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+n)^2}{b^2}=1}$$

$$\boxed{(mx+n)^2=4cx}$$







3.1. Elips:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ve y=**m**x+**n** için

Teğetlik Koşulu

$a^2m^2+b^2=n^2$

3.2. Hiperbol:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ve y=**m**x+**n** için

Teğetlik koşulu

$a^2m^2-b^2=n^2$

3.3. Parabol:

$y^2=4cx$ ve y=**m**x+**n** için

Teğetlik Koşulu

c=m.n (veya p=2mn)

*Dikkat edilecek olursa Elipsle Hiperbol arasındaki fark "**b^2**"lerin önünün **–** (eksi veya ters işaretli) olmasıdır.

4.1. Teğet Denklemleri (Koniğin üzerindeki *$T(x_0,y_0)$* noktasından çizilen teğeti)

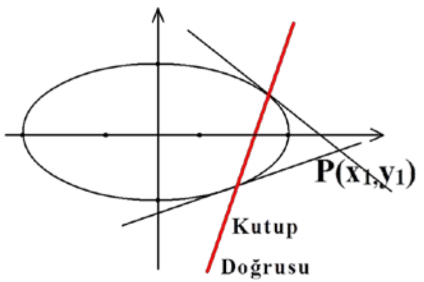
Elips ve hiperbol yine aynı olduğundan ± işaretiyle ortak gösterilecektir. Tıpkı çemberde olduğu gibi kareli terimleri ayırarak ***x*** 'lerin ve ***y*** 'lerin birine verilen (*$T(x_0,y_0)$*)noktanın koordinatlarını yazıyoruz.

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1\rightarrow\frac{xx}{a^2}\pm\frac{yy}{b^2}=1\rightarrow t:\frac{x_0x}{a^2}\pm\frac{y_0y}{b^2}=1$$

$$y^2=4cx\rightarrow yy=2c(x+x)\rightarrow t: yy_0=2c(x+x_0)$$

*Normal denklemleriniyse *teğete* dik olduğundan ve T noktasından geçmesinden dolayı bulabiliriz.

4.2. Kutup Doğrusu (Değme Kirişi)



Koniğe (Çember, Elips, Hiperbol veya Parabol) dışındaki bir noktadan; ***$P(x_1,y_1)$***, çizilen teğetlerin değme noktalarından geçen doğru parçasına ***Değme Kirişi***, bu doğru parçasını taşıyan doğruya ise ***Kutup Doğrusu*** denir.

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1\rightarrow\frac{xx}{a^2}\pm\frac{yy}{b^2}=1\rightarrow KD:\frac{x_1x}{a^2}\pm\frac{y_1y}{b^2}=1$$

$$y^2=4cx\rightarrow yy=2c(x+x)\rightarrow KD: yy_1=2c(x+x_1)$$

Elips Hiperbol Parabol	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$	$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$	$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$	$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$	$y^2=12x$	$x^2=-12y$
Odakları:						
Dış Merkezliği						
Doğrultman Doğ.						
Doğrultman Çemb.						
Monj Çemberi						
Parametresi						
Basıklığı						
Alanı						
Asimptotları						

6.Ötelenmiş Konikler:

I.

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$$

a=5, **b=4** ve **c=3** bulunur. Merkezil elips olsaydı, odaklar **F(±3,0)** bulunurdu. O halde merkezin ötelendiği {**M(3,-4)**} gibi her bir nokta da ötelenmelidir yani **F_1(3+3,0+4)** ve **F_2(-3+3,0+4)** olarak bulunacağından odaklar **F_1(6,4)** ve **F_2(0,4)** olur.

Buna benzer şekilde her eleman bulunabilir. Bu durum diğer konikler için de geçerlidir.

II.

$y=2x^2+12x-10$ parabolünün odağını bulalım.

$y=2(x^2+6x)-10 \rightarrow y+10=2(x^2+6x) \rightarrow y+10+18=2(x^2+6x)+18 \rightarrow y+28=2(x^2+6x+9) \rightarrow y+28=2(x+3)^2 \rightarrow ½(y+28)=(x+3)^2$

Öyleyse **T(-3,-28)** [*Tepesi veya Merkezi*] olur ancak yine de derecesi 1 olanın {y} önündeki sayı 4c'dir. Dolayısıyla **4c=1/2 → c=1/8** bulunur. Tepe Orijinde olsa ***F(0,1/8)*** olurdu. Ancak tepe T(-3,-28) olduğundan F(0-3,-28+1/8) yani ***F(-3, -223/8)*** bulunur.

Tabii ki ***Tepe {T(x_t,y_t)} "x_t=-b/2a"*** formülü ile de bulunabilir. Ancak bizim buradaki hedefimiz tepe değil odak noktası ve "***c***" sayısıydı. Dolayısıyla verilen denklemi ***$4c(y-y_t)=(x-x_t)^2$*** veya ***$(y-y_t)^2=4c(x-x_t)$*** modeline getirmeliydik.

Örnekler

1) $9x^2+4y^2=36$ elipsi verilsin

a) Üzerindeki T(1,-1) noktasından geçen Teğet ve Normal denklemini

b) Dışındaki P(2,3) noktasından çizilen teğetlerin değme noktalarından geçen doğrunun denklemini

bulunuz.

Cevap

1.a) Üzerindeki noktadan teğet için **4.1.** başlığındaki işlemi yapacağız.

9xx+4yy=36 → 9(1)x+4(-1)y=36 → 9x-4y=36

Yani **t: 9x+4y-36=0** ve Normal denklemiyse t'ye dik olacağından N:4x+9y+c=0 ve T noktasını sağlayacağından 4(1)+9(-1)+c=0 olduğundan c=5 bulunur ve **N: 4x+9y+5=0** bulunur.

1.b) "Dışındaki noktadan" şeklinde tarif edilen Kutup Doğrusudur. **4.2.** başlığındaki işlemle istenilen doğru 9xx+4yy=36 → 9(2)x+4(3)y=36 → 18x+12y=36 → 6 ile sadeleştirme yaparsak **3x+2y-6=0** şeklinde bulunur.

2) $12(x-3)^2-16(y+4)^2=192$ hiperbolünün *monj çemberinin* denklemini bulalım.

Cevap: Öncelikle Kapalı (lineer- genel) denklem halinden standart denklem modeline dönmeliyiz. Bütün denklemi 192 'ye bölersek:

$\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+4)^2}{12}=1$ elde edilir ki buradan **a=4, b=$2\sqrt{3}$** ve **c=$2\sqrt{7}$** bulunur. Merkezse **M(3,-4)** tür. Monj çemberi (başlık **1.3.**) hiperbolle aynı merkezde olacağından $(x-3)^2+(y+4)^2=|16-12|$den **$(x-3)^2+(y+4)^2=4$** bulunur.

3) $y^2=8x$ parabolünün **6x-2y+11=0** doğrusuna paralel teğetinin (*en yakın noktasından geçen*) denklemini bulunuz.

Cevap: Verilen doğrunun eğimi ile teğetin eğimi aynı olacağından **m=3** ve **c=8/4=2** dir. Ancak teğetin y eksenini kestiği noktanın ordinatı ***n*** 'yi bulmalıyız.

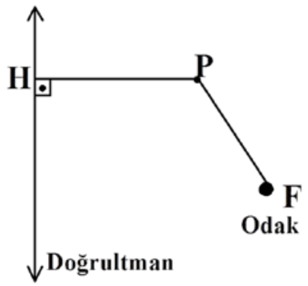
Başlık 3.3. den c=mn olduğundan 2=3n → **n=2/3** bulunur.

y=3x+2/3 → 3y=9x+2 → **9x-3y+2=0** teğetin denklemi olur.

Ekstra Bilgiler

y=mx+n doğrusu için	**ELİPS**	**HİPERBOL**	**PARABOL**
DEĞME NOKTASI	$T\left(-\frac{a^2m}{n},\frac{b^2}{n}\right)$	$T\left(-\frac{a^2m}{n},-\frac{b^2}{n}\right)$	Ortak çözüm yapılarak bulunabilir. $\left(x_0=\frac{2c-mn}{m^2}\right)$
EŞLENİK KÖŞEGEN	$y=-\frac{b^2}{a^2m}x$	$y=\frac{b^2}{a^2m}x$	$y=\frac{2c}{m}$ $veya$ $y=\frac{p}{m}$

7. KONİKLERİN GENEL DENKLEMİ



Koniklerin genel tanımı, bir noktaya (odak) ve bir doğruya (doğrultman) uzaklıkları oranlı olan noktaların geometrik yeridir. Bu orana *Dış Merkezlik* denilir ve ***e*** ile gösterilir.

$$\boxed{e=\frac{|PF|}{|PH|}}$$

0<e<1 → Elips

e=1 → Parabol

1<e<∞ → Hiperbol

Koniklerin genel Denklemi:

$$\boldsymbol{Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0}$$

Δ= $\boldsymbol{B^2-4AC}$ ise Konik Deltasıdır*.

*diskriminant

I. Δ<0 ise çember, elips, nokta veya boş küme (e<1)

a) A=C ve B=0 ise Çember, nokta veya boş küme

b) A≠C veya B≠0 ise Elips, nokta veya boş küme

II. Δ>0 Hiperbol veya kesişen iki doğru (e>1)

a) Denklem çarpanlara ayrılıyorsa Kesişen iki doğru

b) Denklem çarpanlara ayrılmıyorsa Hiperbol

III. Δ=0 ise Parabol veya Paralel iki doğru (e=1)

a) Denklem çarpanlara ayrılıyorsa Paralel veya çakışık iki doğru

b) Denklem çarpanlara ayrılmıyorsa Parabol

Örnekler

1) $x^2-y^2=0$ denkleminin ne belirtiğini bulalım.

Çözüm

A=1,B=0 ve C=-1 olduğundan Δ=0-4.1(-1)=4>0 olduğundan **II.** durum söz konusudur.

(x+y).(x-y)=0 olduğundan **x+y=0** ve **x-y=0** şeklinde **kesişen iki doğru** bulunur.

2) $x^2+2xy+y^2+2x+2y=0$ denkleminin ne belirtiğini bulalım.

Çözüm

$\Delta=2^2-4.1.1=0$ olduğundan **III.** durum söz konusudur.

$(x+y)^2+2(x+y)=0 \rightarrow (x+y)[(x+y)+2]=0$ bulunur ki bu **x+y=0** ve **x+y+2=0** şeklinde **paralel iki doğrudur**

3) $4x^2+6xy+2y^2-3x-4y+1=0$ denkleminin ne belirtiğini bulalım.

Çözüm

$\Delta=6^2-4.4.2=4>0$ olduğundan ve çarpanlara ayrılmadığından Hiperbol belirtir.

4) $3x^2+6xy+3y^2+7x-5y-5=0$ denkleminin ne belirtiğini bulalım.

Çözüm

$\Delta=6^2-4.3.3=0$ olduğundan ve çarpanlara ayrılmadığından Parabol belirtir.

5) F(3,0) noktasına uzaklığının **x=4** doğrusuna uzaklığı oranı $\frac{\sqrt{3}}{2}$ olan noktaların geometrik yer denklemini bulalım.

Çözüm

Verilen noktanın odak, doğrununsa doğrultman olduğu ve oranınsa dış merkezlik (e<1) olduğu görülürse bir elips denklemi bulacağımız açıktır.

$$e=\frac{|PF|}{|PH|}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{|x-4|}$$ her iki tarafın karesini alalım $$\rightarrow \quad \frac{3}{4}=\frac{(x-3)^2+y^2}{(x-4)^2}$$

içler-dışlar çarpımı yaparken parantezleri de açalım $$3x^2-24x+48=4x^2-24x+36+4y^2 \rightarrow x^2+4y^2=12 \rightarrow \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$$

http://ozgurgeo.weebly.com/